

# Quotientenmengen

$\sim$  Äquivalenzrelation auf Menge  $X$

Äquivalenzklasse von  $x \in X$ :

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\} \subset X$$

## Quotientenmenge

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

## Quotientenabb.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_{\sim}} & X/\sim \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

$\pi_{\sim}$  surjektiv

Fasern von  $\pi_{\sim}$   $\pi_{\sim}^{-1}([x]) = [x]$ .

Notiz: Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  beliebige Abb. von Mengen, so definiert

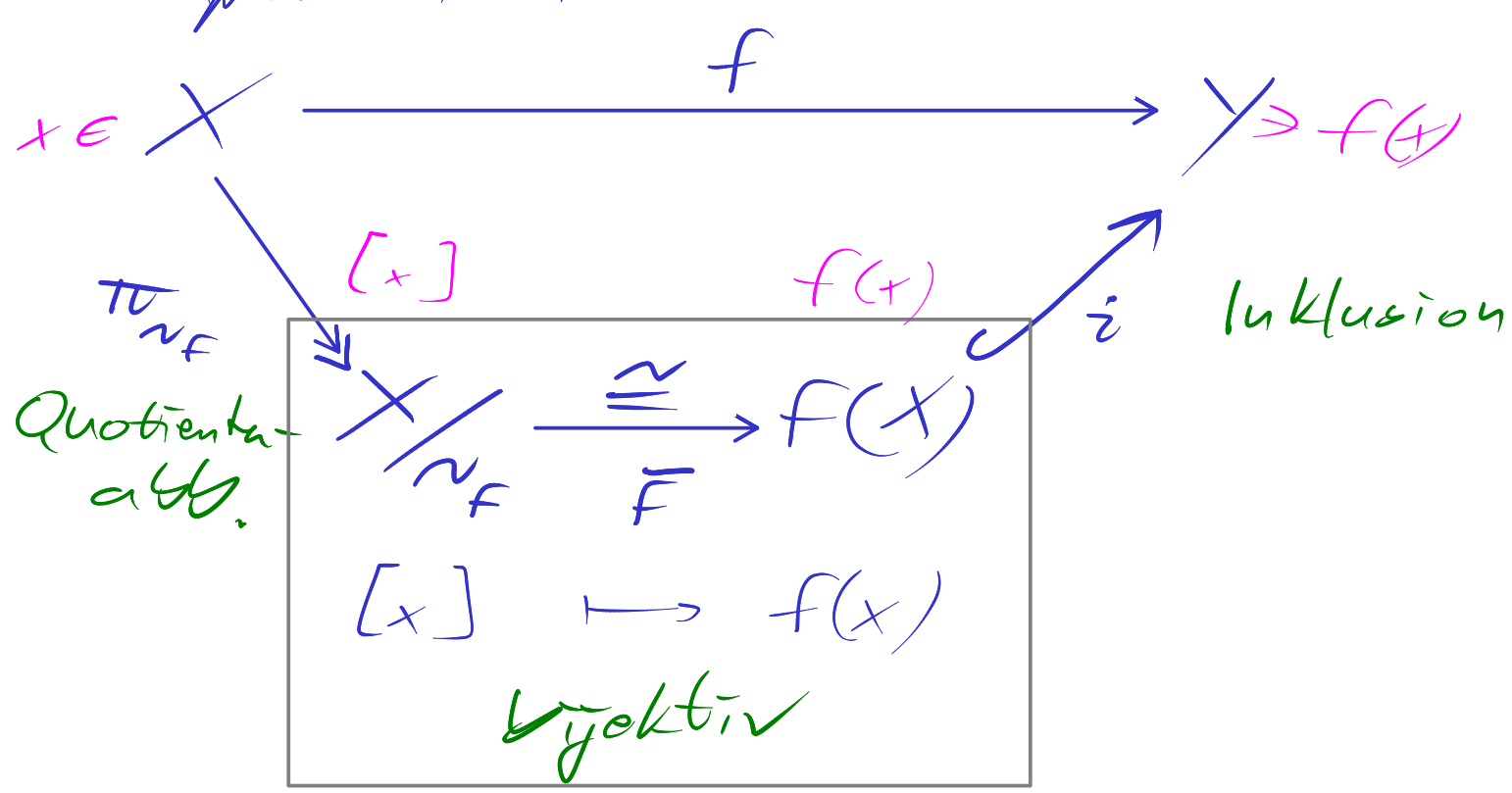
$x_1 \sim_f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$   
eine Äquivalenzrelation.

Notiz: Die nicht-leeren Fasern von  $f$  sind die Äquivalenzklassen von  $\sim_f$ : Für jedes  $x \in \bar{f}(y)$

$$[x] = \bar{f}(y)$$

# „Isomorphiesatz für Mengen“

Jede Abbildung von Mengen  $X \xrightarrow{f} Y$  lässt sich kanonisch zerlegen („faktorisieren“) in eine Komposition



(„Isomorphismus von Mengen“)

# Quotientengruppen

$(G, +)$  abelsche Gruppe

$H$  Untergruppe

Def. Die Nebenklassen von  $H$  in  $G$  sind die Teilmengen von der Form

$$\begin{aligned} g + H &:= \{g + h \mid h \in H\} \\ &= \{x \in G \mid x - g \in H\} \end{aligned}$$

für ein  $g \in G$ .

Notiz: Die Nebenklassen sind die Äquivalenzklassen der  $\sim_H$ -Rel.

$$x_1 \sim_H x_2 \iff x_1 - x_2 \in H$$

Notation:  $G/H := G/\sim_H$

Satz:  $G$  abelsch,  $H \subset G$   
Untergruppe. Die Verknüpfung

$$(x+H) \oplus (y+H) := (x+y) + H$$
$$[x] \oplus [y] = [x+y]$$

definiert eine Gruppenstruktur  
auf  $G/H$ . Ferner ist  
die Quotientenabb.

$$(G, +) \longrightarrow (G/H, \oplus)$$
$$x \longmapsto x + [H]$$
$$[x]$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Def:  $f: (G, +) \longrightarrow (G', +)$  Gruppenhomom.

Kern  $\text{Ker } f := f^{-1}(0) \subset G$

Bild  $\text{Im } f := f(G) \subset G'$

Notiz: Kern und Bild sind Untergruppen.

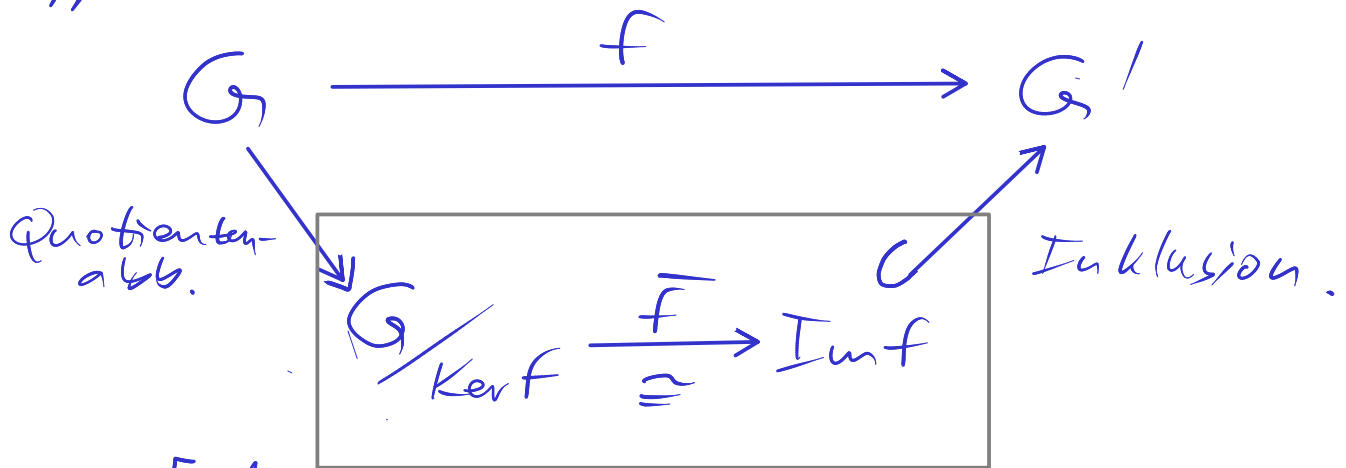
Notiz:  $\sim_f = \sim_{\text{Ker } f}$

Notiz: Die nicht-leeren Fasern von  $f$  sind die Nebenklassen von  $\text{Ker} f$ :

für jedes  $x \in f^{-1}(y)$  ist

$$x + \text{Ker} f = [x] = f^{-1}(y)$$

Isomorphiesatz für abelsche Gruppen  
 Jeder Homomorphismus von abelschen Gruppen lässt sich faktorisieren als



$$[x] = x + \text{Ker} f \mapsto f(x)$$

wobei alle Abb. Gruppenhomomorph. sind. Insbesondere ist  $\overline{f}$  ein Gruppenisomorphismus.

# Quotientenvektorräume

$V$   $K$ -VR

$U$   $K$ -UVR

Satz: Die Quotientengruppe  $V/U$   
(3.2.7) ist ein  $K$ -VR bezüglich der  
Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (v + U) := \lambda \cdot v + U$$

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v]$$

und die Quotientenabb.

$$V \longrightarrow V/U$$

ist  $K$ -linear.

Def:  $V/U$  Quotienten(vektor)raum (3.2.7)

$$[v] = v + U \subseteq V$$

affine Räume über  $U$   
(3.2.3)

Nach Konstruktion

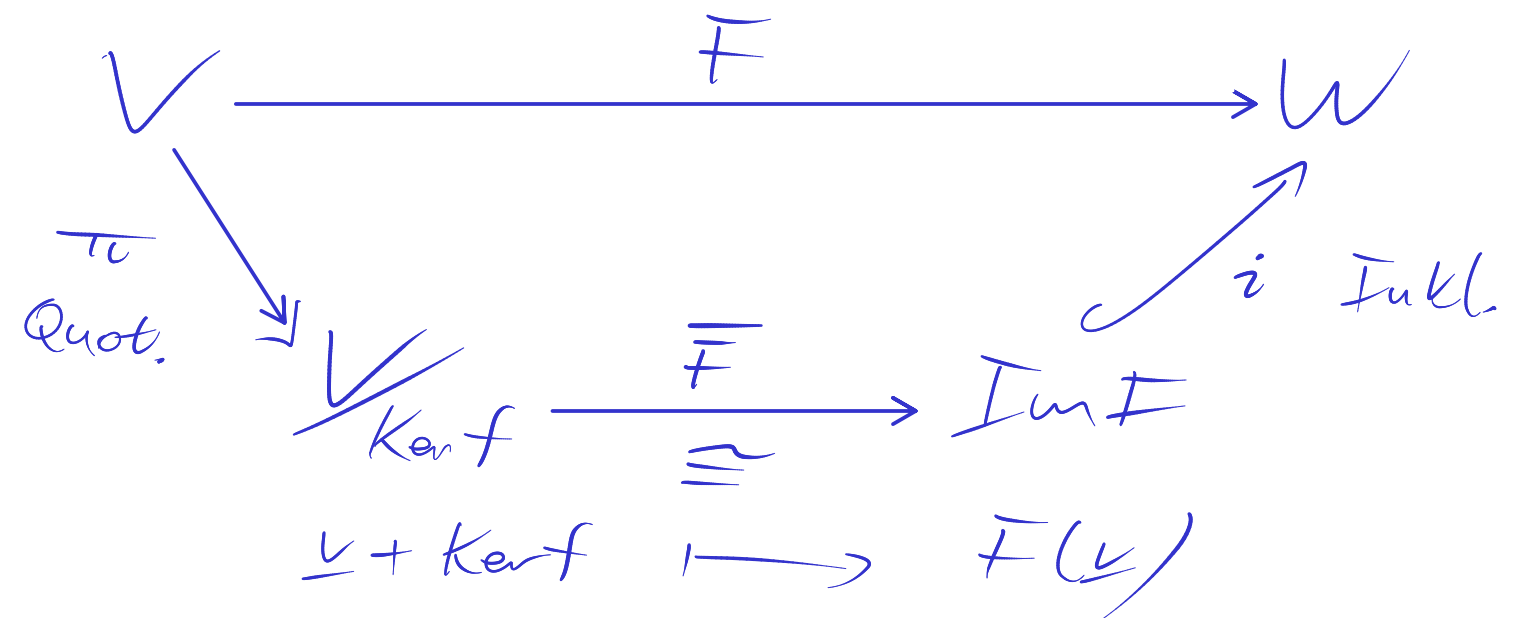
$$[v] = [v'] \Leftrightarrow v - v' \in U$$

Notiz: Die nicht-leeren Fasern  
 (3.2.2) einer  $K$ -linearen Abb.  
 $F: V \rightarrow W$  sind  
 die Nebenklassen von  $\ker F$   
 die affinen Räume über  
 $\ker F$ .

für jedes  $\underline{v} \in \bar{F}^{-1}(\underline{w})$   
 $\underline{v} + \ker F = \bar{F}^{-1}(\underline{w})$ .

Isomorphiesatz für VR

Jede  $K$ -lineare Abb.  $F: V \rightarrow W$   
 lässt sich faktorisieren als



Hier sind alle Abb.  $K$ -linear.

Insgesondere ist  $F$  ein  
Isomorphismus von Vektorräumen.