Quotientenmengen

$\sim$ Äquivalenzrelation auf Menge X

Äquivalenzklasse von $x \in X$:

$$[x] := \{ y \in X \mid y \sim x \} \subset X$$

Quotientenmenge

$$X/_\sim := \{ [x] \mid x \in X \}$$

Quotientenabb.

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\pi_\sim} X/_\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

$\pi_\sim$ surjektiv

Fasern von $\pi_\sim$ $\quad \pi_\sim^{-1}([x]) = [x]$.

Notiz: Ist $X \xrightarrow{f} Y$ beliebige Abb. von Mengen, so definiert

$$x_1 \sim_f x_2 :\Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation.

Notiz: Die nicht-leeren Fasern von f sind die Äquivalenzklassen von $\sim_f$: Für jedes $x \in f^{-1}(y)$

$$[x] = f^{-1}(y)$$

„Isomorphiesatz für Mengen"

Jede Abbildung von Mengen $X \xrightarrow{f} Y$ lässt sich kanonisch zerlegen („faktorisieren") in eine Komposition

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi_{\sim_f}"'] & & Y \ni f(x) \\ X/{\sim_f} \arrow[r, "\cong", "\bar{f}"'] & f(X) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

$[x]$ $f(x)$

Quotientenabb.

Inklusion

$$[x] \longmapsto f(x)$$

bijektiv

(„Isomorphismus von Mengen")

Quotientengruppen

$(G,+)$ abelsche Gruppe

H Untergruppe

Def. Die <u>Nebenklassen</u> von H in G sind die Teilmengen von der Form

$$g+H := \{g+h \mid h \in H\} = \boxed{\{x \in G \mid x-g \in H\}}$$

für ein $g \in G$.

Notiz: Die Nebenklassen sind die Äquivalenzklassen der Ä-Rel.

$$x_1 \sim_H x_2 \quad :\Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in H$$

Notation: $G/H := G/\sim_H$

Satz: G <u>abelsch</u>, $H \subset G$ Untergruppe. Die Verknüpfung

$$(x+H) \oplus (y+H) := (x+y)+H$$
$$[x] \oplus [y] = [x+y]$$

definiert eine Gruppenstruktur auf G/H. Ferner ist die Quotientenabb.

$$(G,+) \longrightarrow (G/H, \oplus)$$
$$x \longmapsto x+[H]$$
$$[x]$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Def: $f: (G,+) \longrightarrow (G',+)$ Gruppenhomom.

<u>Kern</u> $\quad \operatorname{Ker} f := f^{-1}(0) \quad \subset G$

<u>Bild</u> $\quad \operatorname{Im} f := f(G) \quad \subset G'$

Notiz: Kern und Bild sind Untergruppen.

Notiz: $\sim_f \; = \; \sim_{\operatorname{Ker} f}$

Notiz: Die nicht-leeren Fasern von f sind die Nebenklassen von $\mathrm{Ker} f$:
für jedes $x \in f^{-1}(y)$ ist

$$x + \mathrm{Ker} f = [x] = f^{-1}(y)$$

Isomorphiesatz für abelsche Gruppen

Jeder Homomorphismus von abelschen Gruppen lässt sich faktorisieren als

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\text{Quotientenabb.}"'] & & G' \\
G/\mathrm{Ker} f \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & \boxed{\mathrm{Im} f} \arrow[ur, hook, "\text{Inklusion}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$[x] = x + \mathrm{Ker} f \longmapsto f(x)$$

wobei alle Abb. Gruppenhomomorph. sind. Insbesondere ist $\bar{f}$ ein Gruppenisomorphismus.

Quotientenvektorräume

V K-VR

U K-UVR

Satz: (3.2.7) Die Quotientengruppe V/U ist ein K-VR bezüglich der Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (\underline{v} + U) := \lambda \cdot \underline{v} + U$$

$$\lambda \cdot [\underline{v}] := [\lambda \cdot \underline{v}]$$

und die Quotientenabb.

$$V \longrightarrow V/U$$

ist K-linear.

Def: V/U <u>Quotienten(vektor)raum</u> (3.2.7)

$$[v] = v + U \subseteq V$$

<u>affine Räume</u> über U (3.2.3)

Nach Konstruktion

$$[v] = [v'] \iff \underline{v} - \underline{v}' \in U$$

Notiz: (3.2.2) Die nicht-leeren Fasern einer K-linearen Abb. $F: V \longrightarrow W$ sind
die Nebenklassen von $\ker F$
die affinen Räume über $\ker F$.
für jedes $\underline{v} \in F^{-1}(\underline{w})$
$$\underline{v} + \ker F = F^{-1}(\underline{w}).$$

Isomorphiesatz für VR

Jede K-lineare Abb. $F: V \longrightarrow W$ lässt sich faktorisieren als

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "F"] \arrow[d, "\pi"', "\text{Quot.}"] & & & W \\
V/\ker F \arrow[rr, "\overline{F}", "\cong"'] & & \operatorname{Im} F \arrow[ur, "i", "\text{Inkl.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\underline{v} + \ker F \longmapsto F(\underline{v})$$

Hier sind alle Abb. K-linear.

Insbesondere ist $\overline{F}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen.